

ELEKTR SILJISH VEKTORI, ELEKTROSTATIK MAYDON INDUKSIYA VEKTORI VA UNING OQIMI

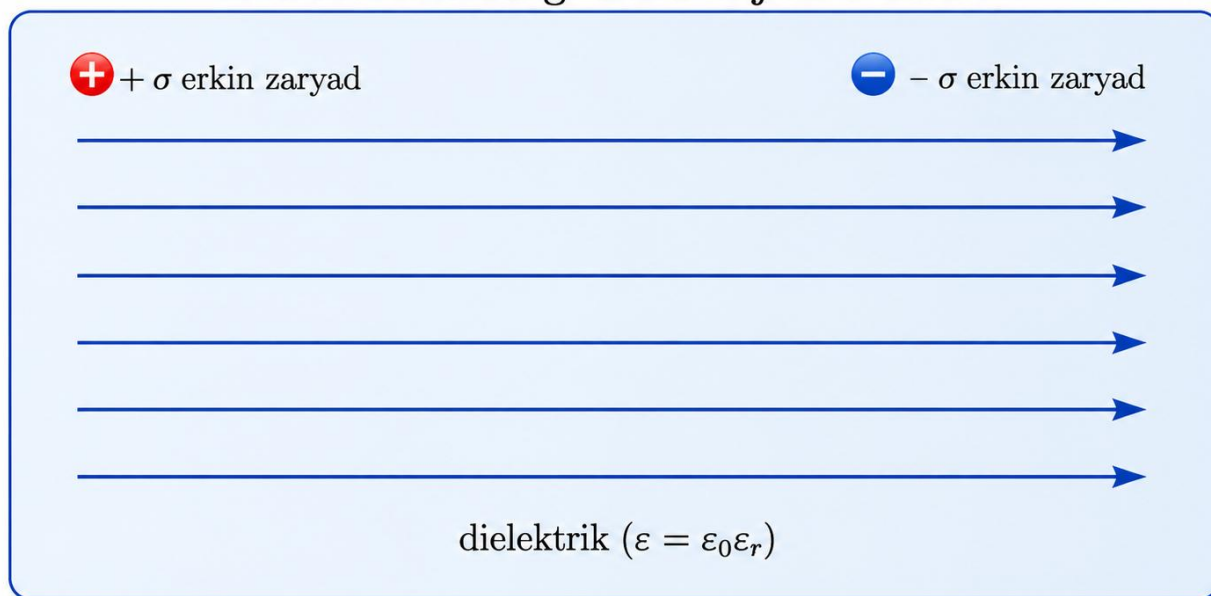
Elektr maydonni hisoblash usullari, Gauss teoremasi va amaliy misollar

Elektr maydonni modda ichida o'rganishda faqat elektr maydon kuchlanganligi E bilan cheklanib qolish yetarli emas. Dielektrik muhit tashqi elektr maydon ta'sirida qutblanadi va bog'langan zaryadlar hosil bo'ladi. Erkin zaryadlarning maydon hosil qilishdagi rolini qulay ifodalash uchun elektr siljish vektori D , ya'ni elektrostatik induksiya vektori kiritiladi. Ushbu kattalik Gauss teoremasini dielektriklar uchun soddashaklda yozish va simmetrik zaryad taqsimotlarining elektr maydonini hisoblash imkonini beradi.

Mavzuning asosiy tushunchalari

Elektr siljish vektori D ; elektr maydon kuchlanganligi E ; muhitning dielektrik singdiruvchanligi ϵ ; qutblanish vektori P ; elektr induksiya oqimi; yopiq sirt; Gauss teoremasi; sferik, silindrik va tekis simmetriyali elektr maydonlar.

Dielektrik ichidagi elektr siljish vektori D



D – elektr siljish vektori (C/m^2)
 σ – erkin sirt zaryad zichligi (C/m^2)
 ϵ – dielektrikning absolyut dielektrik singdiruvchanligi (F/m)
 ϵ_0 – vakuumning dielektrik singdiruvchanligi ($8.854 \times 10^{-12} F/m$)
 ϵ_r – nisbiy dielektrik singdiruvchanlik (o'lchamsiz)

1-rasm. Dielektrik muhitda elektr siljish vektorining yo'nalishi

Bir jinsli izotrop dielektrikda D va E vektorlari bir xil yo'nalishda bo'ladi. Biroq ularning fizik mazmuni farqlanadi: E maydonning zaryadga kuch ta'sirini, D esa asosan erkin zaryadlar bilan bog'liq maydonni tavsiflash uchun qulaydir.

1. Elektr siljish vektori D

Dielektrik elektr maydonga kiritilganda uning atom va molekulalaridagi musbat hamda manfiy zaryad markazlari bir-biriga nisbatan siljishi yoki mavjud dipollar maydon bo'ylab tartiblanishi mumkin. Natijada qutblanish vektori P yuzaga keladi. Vakuumdagi elektr maydon va dielektrik qutblanishini birgalikda ifodalash uchun elektr siljish vektori quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Chiziqli, bir jinsli va izotrop dielektrik uchun $P = \epsilon_0 \chi_e E$ bo'lib, χ_e - elektr qabul qiluvchanlik. $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ ekanini hisobga olsak:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Bu yerda $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m - elektr doimiysi, ϵ_r - muhitning nisbiy dielektrik singdiruvchanligi, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ - absolyut dielektrik singdiruvchanlik. D ning SI birligi C/m².

1-misol

Nisbiy dielektrik singdiruvchanligi $\epsilon_r = 4$ bo'lgan muhitda $E = 3 \times 10^4$ N/C bir jinsli maydon mavjud. Elektr siljish vektorining modulini topamiz:

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = 8.854 \times 10^{-12} \cdot 4 \cdot 3 \times 10^4 \approx 1.06 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

Natija shuni ko'rsatadiki, berilgan muhit va E qiymati uchun D taxminan $1.06 \mu\text{C/m}^2$ ga teng. D vektorining yo'nalishi E vektori yo'nalishi bilan bir xil.

Kattalik	Belgi	Mazmuni	SI birligi
Elektr maydon kuchlanganligi	E	Birlik musbat zaryadga ta'sir etuvchi kuch	N/C
Elektr siljish vektori	D	Erkin zaryadlar bilan bog'liq maydon xarakteristikasi	C/m ²
Qutblanish vektori	P	Birlik hajm dipol momenti	C/m ²
Dielektrik singdiruvchanlik	ϵ	Muhitning elektr xossasi	F/m

2. Elektrostatik induksiya vektori va uning fizik mazmuni

Elektr siljish vektori ko'pincha elektr induksiya vektori yoki elektrostatik induksiya vektori deb ham yuritiladi. D ning muhim afzalligi shundaki, uning yopiq sirt bo'yicha oqimi faqat shu sirt ichidagi erkin zaryadlar bilan bog'lanadi. Dielektrikdagi bog'langan zaryadlarning ta'siri ϵ yoki P orqali hisobga olinadi.

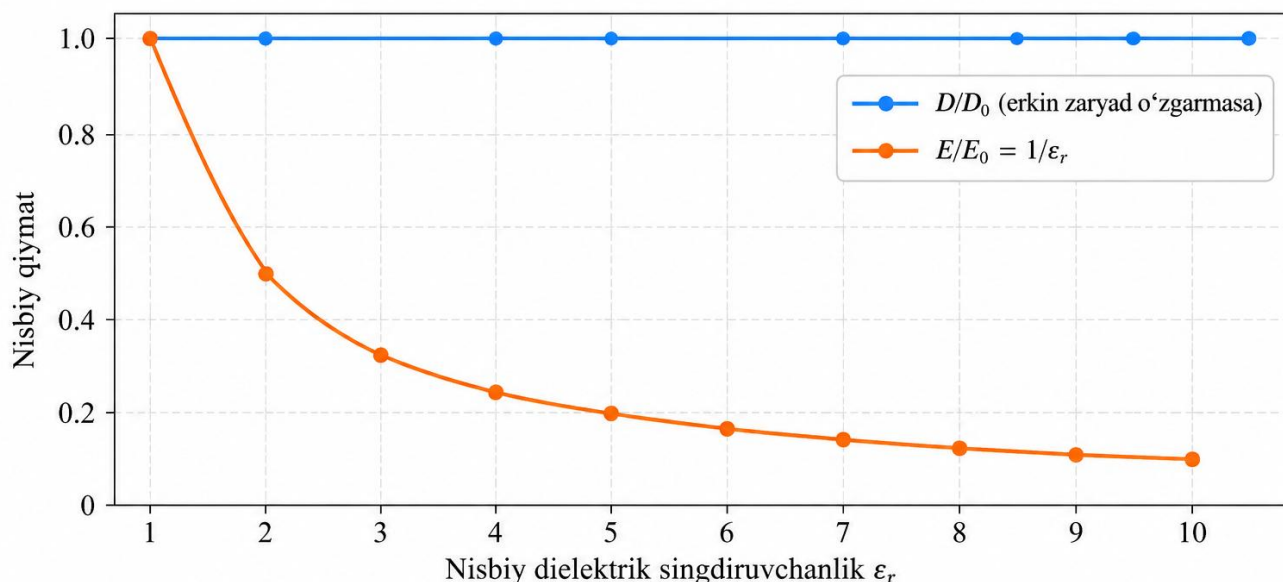
Vakuumba $P = 0$ bo'lgani sababli $D = \epsilon_0 E$. Moddada esa qutblanish mavjud bo'lib, umumiy elektr maydon E erkin va bog'langan zaryadlar ta'sirining natijasidir.

D va E orasidagi farq

Xususiyat	E vektori	D vektori
Asosiy ma'no	Maydonning kuch xarakteristikasi	Elektr siljish/induksiya xarakteristikasi
Birlik	N/C yoki V/m	C/m ²
Manbalar	Erkin va bog'langan zaryadlar	Gauss qonunida erkin zaryadlar
Chiziqli muhit	$E = D/\varepsilon$	$D = \varepsilon E$
Vakuum	E	$D = \varepsilon_0 E$

Masalan, parallel plastinkali kondensator erkin zaryadi o'zgarmagan holda dielektrik bilan to'ldirilsa, D ning normal tashkil etuvchisi erkin sirt zaryad zichligi bilan belgilanadi va o'zgarmaydi, E esa ε_r marta kamayadi.

Dielektrik kiritilganda E va D ning o'zgarishi



$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0$$

D – elektr siljish vektori (C/m²)

E – elektr maydon kuchlanganligi (V/m)

ε – muhitning absolyut dielektrik singdiruvchanligi (F/m)

ε_0 – vakuum dielektrik singdiruvchanligi (8.854×10^{-12} F/m)

ε_r – nisbiy dielektrik singdiruvchanlik (o'lchamsiz)

2-rasm. Erkin zaryad o'zgarmaganda dielektrik singdiruvchanlikning E va D ga ta'siri

2-misol

Vakuumda $E_0 = 8 \times 10^5$ N/C bo'lgan kondensator oralig'i $\varepsilon_r = 5$ dielektrik bilan to'ldirildi va erkin zaryad saqlandi. Yangi maydon $E = E_0/\varepsilon_r = 1.6 \times 10^5$ N/C. D esa $\varepsilon_0 E_0$ ga teng bo'lib qoladi: $D \approx 7.08 \times 10^{-6}$ C/m².

3. Elektr induksiya oqimi

Vektor maydonning sirt orqali o'tishini miqdoriy baholash uchun oqim tushunchasi qo'llaniladi. Kichik dS sirt elementiga tashqi normal n yo'naltiriladi. D vektori bilan normal orasidagi burchak α bo'lsa, elementar elektr siljish oqimi:

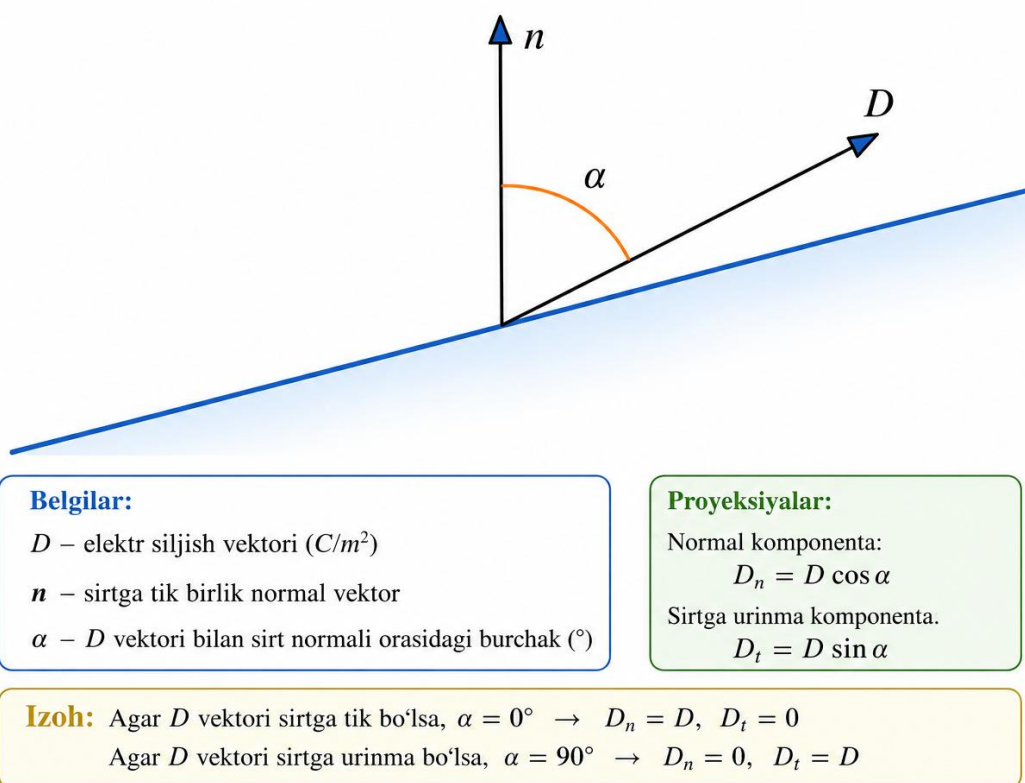
$$d\Phi_D = \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cos \alpha \cdot dS$$

Umumiy sirt uchun oqim integral orqali aniqlanadi:

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Agar D bir jinsli, sirt tekis va α o'zgarmas bo'lsa, formula $\Phi_D = DS \cos \alpha$ ko'rinishga keladi. D sirtga normal bo'lsa $\alpha = 0$ va oqim maksimal; D sirtga parallel bo'lsa $\alpha = 90^\circ$ va oqim nol.

D vektori va sirt normalining o'zaro holati



3-rasm. D vektori bilan sirt normalining orasidagi α burchak

3-misol

$D = 4 \times 10^{-6} C/m^2$ bir jinsli induksiya maydonida $S = 0.20 m^2$ tekis sirt joylashgan. D bilan sirt normali orasidagi burchak 60° . Oqim:

$$\Phi_D = DS \cos 60^\circ = 4 \times 10^{-6} \cdot 0.20 \cdot 0.5 = 4 \times 10^{-7} C$$

Demak, berilgan sirt orqali elektr siljish oqimi $0.4 \mu C$ ga teng. Burchak 90° bo'lganida esa oqim nol bo'lar edi.

4. Gauss teoremasi D vektori uchun

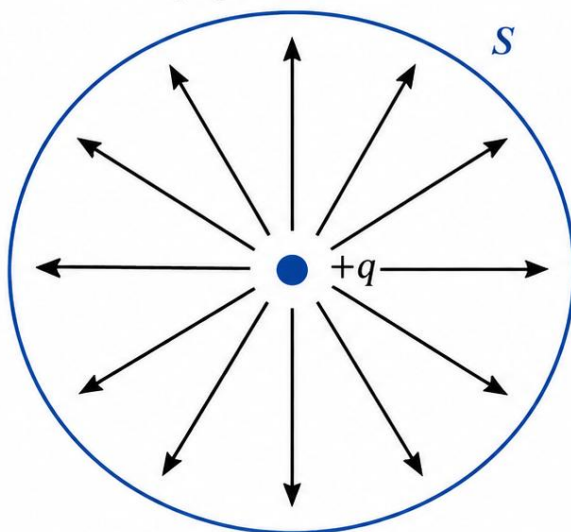
Elektrostatik maydonni hisoblashda eng muhim qonunlardan biri Gauss teoremasidir. Elektr siljish vektori uchun yopiq sirt orqali to'liq oqim shu sirt ichida joylashgan erkin zaryadlarning algebraik yig'indisiga teng:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{erkin}}$$

Differensial ko'rinishda bu qonun $\text{div } D = \rho_{\text{erkin}}$ tarzida yoziladi. Gauss teoremasi har qanday yopiq sirt uchun to'g'ri, lekin maydonni oson hisoblash uchun sferik, silindrik yoki tekis simmetriyaga mos Gauss sirtini tanlash muhim.

Elektr induksiya oqimi

Yopiq Gauss sirti S



Elektr induksiya oqimi Φ_D quyidagicha aniqlanadi:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Agar yopiq sirt ichida $+q$ zaryad bo'lsa, Gauss qonuniga ko'ra:

$$\Phi_D = \frac{q}{\epsilon}$$

Bu yerda: $\vec{D}$ – elektr siljish vektori (C/m^2),

$d\vec{S}$ – yopiq sirtning elementar yuzasi vektori, q – yopiq sirt ichidagi zaryad,

ϵ – muhitning absolyut dielektrik singdiruvchanligi (F/m).

4-rasm. Nuqtaviy zaryad atrofidagi yopiq Gauss sirti va D oqimi

4-misol: nuqtaviy zaryad

Markazda $q = 6 \text{ nC}$ erkin zaryad joylashgan. Radiusi $r = 0.10 \text{ m}$ sferik Gauss sirti olamiz. Simmetriya sababli D barcha nuqtalarda radial va moduli bir xil:

$$D \cdot 4\pi r^2 = q \rightarrow D = q/(4\pi r^2)$$

$$D = 6 \times 10^{-9} / [4\pi(0.10)^2] \approx 4.77 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

Agar muhit $\epsilon_r = 3$ bo'lsa, $E = D/(\epsilon_0 \epsilon_r) \approx 1.80 \times 10^3 \text{ N/C}$. Shu yo'l bilan avval D, keyin E topilishi ko'pincha dielektrikdagi masalalarni soddalashtiradi.

5. Elektr maydonni Gauss teoremasi yordamida hisoblash

Gauss teoremasidan samarali foydalanishning asosiy sharti - zaryad taqsimotining simmetriyasini aniqlash. Agar maydonning moduli tanlangan yopiq sirtning tegishli qismlarida o'zgarmasa va D vektorining yo'nalishi sirt normaliga nisbatan sodda bo'lsa, integral algebraik ifodaga aylanadi.

Simmetriya	Gauss sirti	Asosiy natija
Sferik	Radiusi r bo'lgan sfera	$D = Q/(4\pi r^2)$
Silindrik	Radius r , uzunlik L silindr	$D = \lambda/(2\pi r)$
Tekis	Yupqa pillbox	$D_n = \sigma_{\text{erkin}}$ (mos holatda)

5-misol: cheksiz uzun zaryadlangan sim

Chiziqliy zaryad zichligi $\lambda = 2 \times 10^{-8}$ C/m bo'lgan juda uzun simdan $r = 0.05$ m masofadagi maydonni topamiz. Sim bilan koaksial radiusi r va uzunligi L bo'lgan silindrik Gauss sirti tanlanadi. D yon sirtga normal, asoslarda esa oqim nol:

$$D(2\pi rL) = \lambda L \rightarrow D = \lambda/(2\pi r)$$

$$D \approx 2 \times 10^{-8} / [2\pi \cdot 0.05] \approx 6.37 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

Vakuumdagi $E = D/\epsilon_0 \approx 7.19 \times 10^3$ N/C. Agar $\epsilon_r = 2.5$ muhit bo'lsa, $E \approx 2.88 \times 10^3$ N/C.

6-misol: tekis zaryadlangan sirt

Cheksiz katta o'tkazgich sirtining tashqi tomonida erkin sirt zaryad zichligi $\sigma = 5$ $\mu\text{C/m}^2$ bo'lsin. Elektrostatik muvozanatda o'tkazgich ichida maydon nol. Gauss pillbox sirti uchun tashqi tomondagi D normal tashkil etuvchi:

$$D_n = \sigma = 5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$E = D/\epsilon = \sigma/(\epsilon_0 \epsilon_r)$$

Vakuumdagi $E \approx 5.65 \times 10^5$ N/C.

6. Elektr maydonni hisoblashning umumiy algoritmi

Elektr maydon masalalarini yechishda formulani darhol tanlashdan ko'ra, zaryad taqsimoti va muhit xususiyatini tahlil qilish muhim. Quyidagi ketma-ketlik ko'p masalalarda xatolarni kamaytiradi.

Bosqich	Bajariladigan amal
1	Erkin zaryadlarning turi va taqsimotini aniqlash: q , λ , σ yoki ρ .
2	Muhitni aniqlash: vakuum yoki ϵ_r ma'lum dielektrik.
3	Simmetriyani tekshirish: sferik, silindrik, tekis yoki simmetriyasiz.
4	Simmetriya kuchli bo'lsa, mos yopiq Gauss sirtini tanlash.
5	$\oint D \cdot dS = Q_{\text{erkin}}$ dan D ni hisoblash.

6	Chiziqli izotrop muhitda $E = D/(\epsilon_0\epsilon_r)$ orqali E ni topish.
7	Zaryadga ta'sir kuchi kerak bo'lsa $F = q_0E$ dan foydalanish.
8	Natijaning birligi, yo'nalishi va fizik ma'nosini tekshirish.

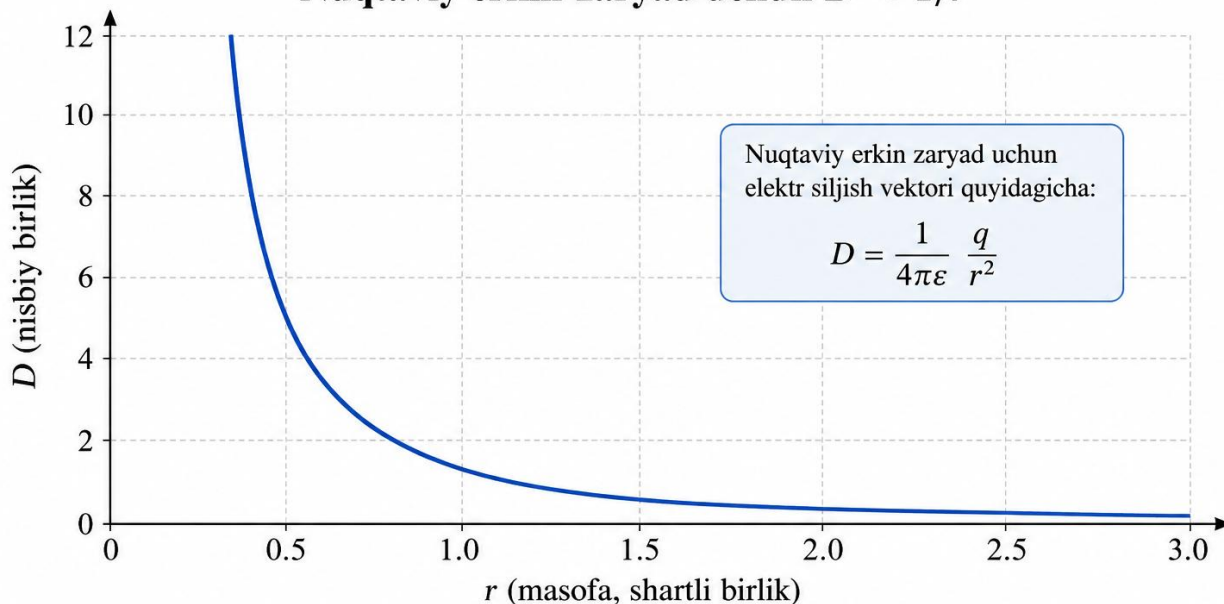
7-misol: sferik simmetriya

Radiusi R bo'lgan o'tkazuvchi sfera sirtida Q erkin zaryad joylashgan. $r > R$ sohada Gauss sirti sifatida radiusi r sfera olinadi. Oqim $D \cdot 4\pi r^2$, ichki erkin zaryad Q :

$$D(r) = Q/(4\pi r^2), \quad E(r) = Q/(4\pi\epsilon r^2)$$

O'tkazgichning ichida elektrostatik muvozanatda $E = 0$ va $D = 0$. Sirt tashqarisida esa maydon xuddi barcha Q zaryad markazda to'plangandek kamayadi.

Nuqtaviy erkin zaryad uchun $D \propto 1/r^2$



Xususiyatlar:

- r kichraygan sari D qiymat keskin ortadi.
- r ortgan sari D qiymat $1/r^2$ qonuniyat bo'yicha kamayadi.
- Masofa kattalashgan sari D nolga yaqinlashadi.

Belgilar:

D – elektr siljish vektori (C/m^2)
 r – nuqtaviy zaryaddan masofa (m)
 q – zaryad (C)
 ϵ – muhitning absolyut dielektrik singdiruvchanligi (F/m)
 $D \propto 1/r^2$ – teskari kvadrat qonun

5-rasm. Sferik simmetriyada D ning masofaga teskari kvadrat bog'lanishi

7. Hajmiy zaryad taqsimotida maydon

Agar zaryad fazoning ma'lum hajmida uzluksiz taqsimlangan bo'lsa, hajmiy zaryad zichligi $\rho = dQ/dV$ ishlatiladi. Gauss sirti ichidagi erkin zaryad $Q_{\text{erkin}} = \int \rho dV$ orqali topiladi. Bir jinsli zaryadlangan shar bunga klassik misoldir.

8-misol: bir jinsli zaryadlangan shar ichida

Radiusi R bo'lgan dielektrik sharda erkin zaryad bir xil ρ zichlik bilan taqsimlangan. $r < R$ masofadagi nuqta uchun radiusi r Gauss sirtini olamiz. Ichki zaryad $Q(r) = \rho \cdot (4/3)\pi r^3$:

$$D \cdot 4\pi r^2 = \rho(4/3)\pi r^3$$

$$D(r) = \rho r/3, \quad E(r) = \rho r/(3\varepsilon)$$

Demak, shar ichida maydon markazdan masofaga to'g'ri proporsional ravishda ortadi. Tashqarida esa umumiy $Q = \rho(4/3)\pi R^3$ zaryad markazdagi nuqtaviy zaryad kabi maydon hosil qiladi:

$$D(r) = Q/(4\pi r^2), \quad r \geq R$$

Bu natija grafik nuqtai nazardan muhim: markazda $D = 0$; shar ichida chiziqli ortadi; sirtga yetganda maksimumga erishadi; tashqarida $1/r^2$ qonun bo'yicha kamayadi.

Chegaraviy shart

Ikki muhit chegarasida D vektorining normal tashkil etuvchilari orasidagi sakrash erkin sirt zaryad zichligi bilan aniqlanadi:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{erkin}}$$

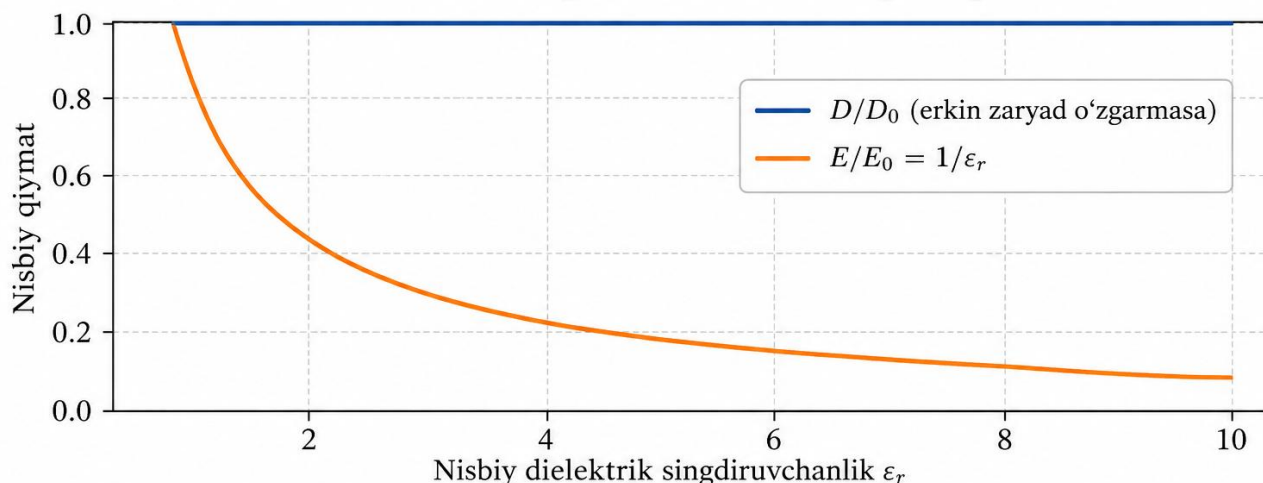
Agar chegarada erkin sirt zaryad bo'lmasa, D ning normal tashkil etuvchisi uzluksiz: $D_{2n} = D_{1n}$. Bu qoida ko'p qatlamli dielektriklar va kondensatorlarni hisoblashda muhim.

8. Formulalar, birliklar va taqqoslash jadvali

Tushuncha	Formula	Birlik
Elektr siljish vektori	$D = \varepsilon_0 E + P$	C/m^2
Chiziqli izotrop muhit	$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$	C/m^2
Elementar oqim	$d\Phi_D = D \cdot dS = D \cos\alpha dS$	C
Yopiq sirt oqimi	$\Phi_D = \oint D \cdot dS$	C
Gauss teoremasi	$\oint D \cdot dS = Q_{\text{erkin}}$	C
Sferik simmetriya	$D = Q/(4\pi r^2)$	C/m^2
Chiziqliy zaryad	$D = \lambda/(2\pi r)$	C/m^2
Tekis sirt	$D_n = \sigma_{\text{erkin}}$	C/m^2
Maydon kuchlanganligi	$E = D/\varepsilon$	N/C

Grafik tahlil

Dielektrik kiritilganda E va D ning o'zgarishi



Agar dielektrik muhitga kiritilsa:

- Erkin zaryad o'zgarmasa, D o'zgarmaydi:

$$D = D_0 \Rightarrow \frac{D}{D_0} = 1$$

- Elektr maydon kuchlanganligi kamayadi:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\epsilon_r}$$

Belgilar:

E – elektr maydon kuchlanganligi (V/m)

D – elektr siljish vektori (C/m²)

E_0 – vakuumdagi elektr maydon kuchlanganligi (V/m)

D_0 – vakuumdagi elektr siljish vektori (C/m²)

ϵ_r – nisbiy dielektrik singdiruvchanlik (o'lchamsiz)

Xulosa: Dielektrik muhit kiritilganda ϵ_r ortadi, E maydon $\frac{1}{\epsilon_r}$ marta kamayadi, lekin D vektor qiymati o'zgarmaydi.

6-rasm. ϵ_r ortganda erkin zaryad saqlangan tizimda E ning kamayishi

Grafikdan ko'rinadiki, kondensatordagi erkin zaryad o'zgarmasa D erkin zaryad bilan belgilanib, ideal holatda doimiy qoladi. E esa $E = D/(\epsilon_0\epsilon_r)$ sababli ϵ_r ortishi bilan kamayadi. Masalan, $\epsilon_r = 2$ da E vakuumdagingining yarmi, $\epsilon_r = 5$ da beshdan biri bo'ladi.

Ko'p uchraydigan xatolar

D va E birliklarini aralashtirish; Gauss teoremasida D uchun umumiy zaryad o'rniga aynan erkin zaryad kerakligini unutish; ochiq sirt integralini yopiq sirt Gauss qonuni bilan almashtirish; $\cos\alpha$ dagi α burchakni sirtning o'zi bilan emas, sirt normali bilan D orasida olish; simmetriya yetarli bo'lmagan vaziyatda Gauss qonunidan D ni bevosita chiqarishga urinish.

9. Mustahkamlash uchun masalalar va xulosa

Mustaqil yechish uchun masalalar

- $\epsilon_r = 6$ muhitda $E = 2 \times 10^5$ N/C bo'lsa, D ni toping.
- $D = 8 \times 10^{-7}$ C/m² bo'lgan bir jinsli maydon $S = 0.5$ m² sirt normaliga 30° burchak ostida yo'nalgan. Oqimni hisoblang.
- Yopiq sirt ichida +12 nC va -5 nC erkin zaryadlar bor. D oqimini toping.
- $\lambda = 4 \times 10^{-8}$ C/m uzun simdan 0.08 m masofadagi D ni aniqlang.
- $\sigma = 3$ μ C/m² erkin sirt zaryadli o'tkazgichning vakuumdagi tashqi E maydonini toping.

6. $Q = 10 \text{ nC}$ zaryad $\epsilon_r = 4$ muhitda joylashgan. $r = 0.20 \text{ m}$ da D va E ni hisoblang.

Qisqa javoblar

1) $D = \epsilon_0 \epsilon_r E \approx 1.06 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$. 2) $\Phi_D = DS \cos 30^\circ$. 3) $\Phi_D = Q_{\text{erkin}} = 7 \text{ nC}$. 4) $D = \lambda / (2\pi r)$. 5) $E = \sigma / \epsilon_0$. 6) $D = Q / (4\pi r^2)$, so'ng $E = D / (\epsilon_0 \epsilon_r)$.

Xulosa

Elektr siljish vektori D dielektrik muhitdagi elektrostatik maydonni tavsiflash va erkin zaryadlarning rolini ajratib ko'rsatishda muhim fizik kattalikdir. Chiziqli izotrop muhitda u $D = \epsilon E$ munosabat bilan elektr maydon kuchlanganligiga bog'lanadi. D vektorining sirt orqali oqimi $D \cdot dS$ skalyar ko'paytma orqali aniqlanadi, yopiq sirt uchun esa Gauss teoremasi $\oint D \cdot dS = Q_{\text{erkin}}$ ko'rinishini oladi. Sferik, silindrik va tekis simmetriyali zaryad taqsimotlarida ushbu teorema elektr maydonni hisoblashni keskin soddalashtiradi. Masalalarda avval D ni erkin zaryad va simmetriya orqali topish, so'ng muhit xossalari hisobga olib $E = D/\epsilon$ dan foydalanish samarali usul hisoblanadi.

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

1. Halliday D., Resnick R., Walker J. Fundamentals of Physics. Wiley.
2. Young H. D., Freedman R. A. University Physics with Modern Physics. Pearson.
3. Serway R. A., Jewett J. W. Physics for Scientists and Engineers. Cengage.
4. Oliy ta'lim uchun umumiy fizikaning «Elektr va magnetizm» bo'limiga oid darslik va o'quv qo'llanmalar.