

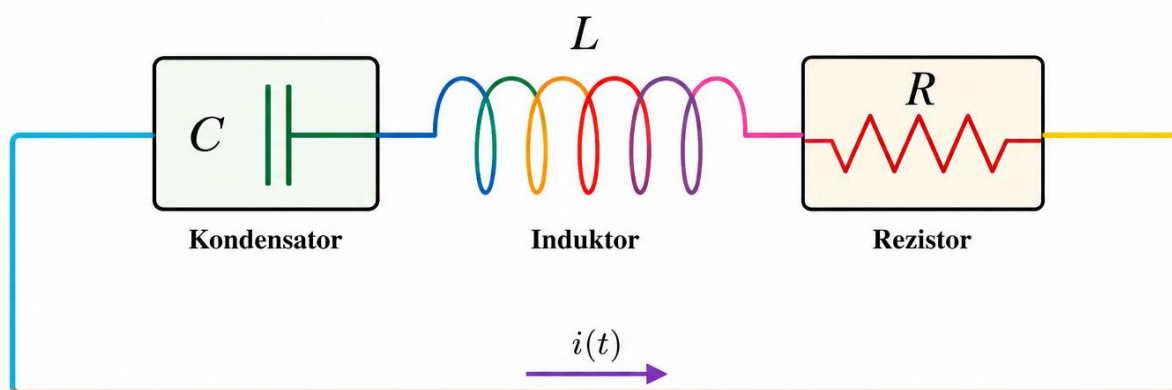
ELEKTR TEBRANISHLAR. XUSUSIY, SO'NUVCHI, SO'NISHSIZ VA MAJBURIY ELEKTR TEBRANISHLAR

Elektr tebranishlar — elektr zanjiridagi zaryad, tok, kuchlanish hamda elektr va magnit maydon energiyalarining vaqt bo'yicha davriy yoki kvazidavriy o'zgarishidir. Eng sodda elektromagnit tebranish tizimi kondensator C va induktivlik L dan tashkil topgan LC konturdir. Real zanjirda R qarshilik mavjudligi energiyaning Joul issiqligiga sarflanishiga va tebranish amplitudasining kamayishiga olib keladi. Tashqi davriy EYuK ta'sirida esa majburiy tebranishlar va rezonans hodisasi yuzaga keladi.

Darsning maqsadi

LC va RLC konturlardagi xususiy elektr tebranishlarning differensial tenglamalarini keltirib chiqarish; so'nishsiz va so'nuvchi rejimlarni taqqoslash; tebranish chastotasi, davri, so'nish koeffitsienti, logarifmik dekrement va sifat koeffitsientini tushuntirish; tashqi sinusoidal EYuK ostidagi majburiy tebranish va rezonansni misollar orqali hisoblash.

Ketma-ket RLC tebranish konturi



Belgilashlar:

C — kondensator (sig'im)

L — induktor (induktivlik)

R — rezistor (qarshilik)

$i(t)$ — konturdan oqayotgan tok

Ketma-ket RLC kontur uchun KVV (Kirhoffning kuchlanishlar yig'indisi) tenglamasi:

$$u_C(t) + u_L(t) + u_R(t) = 0$$

bu yerda:

$$u_C = \frac{1}{C}q, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri$$

1-rasm. Ketma-ket RLC tebranish konturining sxematik modeli

Kattalik	Belgi	SI
Sig'im	C	F
Induktivlik	L	H
Qarshilik	R	Ω
Zaryad	q	C
Tok	$I=dq/dt$	A
Burchak chastota	ω	rad/s
Davr	T	s

So'nish koeffitsienti	$\beta=R/(2L)$	s^{-1}
-----------------------	----------------	----------

1. Xususiy elektr tebranishlar tenglamasi

Avval ideal LC konturini qaraymiz. Kondensator q zaryad bilan zaryadlangach manbadan uzilib induktivlikka ulanadi. Kirxgofning ikkinchi qoidasiga ko'ra kondensator kuchlanishi va induktivlikdagi o'zinduksiya kuchlanishining algebraik yig'indisi nol:

$$q/C + L \, dI/dt = 0$$

$I=dq/dt$ bo'lgani uchun:

$$L \, d^2q/dt^2 + q/C = 0$$

L ga bo'lib:

$$d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$$

Xususiy burchak chastota $\omega_0^2=1/(LC)$ deb belgilansa:

$$d^2q/dt^2 + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Bu garmonik ossillyator tenglamasi. Uning yechimi:

$$q(t)=q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I(t)=dq/dt=-\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Tebranish davri Tomson formulasi bilan aniqlanadi:

$$T=2\pi\sqrt{LC}, \quad f=1/(2\pi\sqrt{LC})$$

1-misol

$L=0.20$ H va $C=5 \mu F$ bo'lsa, $LC=10^{-6} \text{ s}^2$, $\sqrt{LC}=10^{-3} \text{ s}$. $T=2\pi \times 10^{-3} \approx 6.28 \text{ ms}$, $f \approx 159 \text{ Hz}$.

2. So'nish bo'lmagandagi elektr tebranishlar

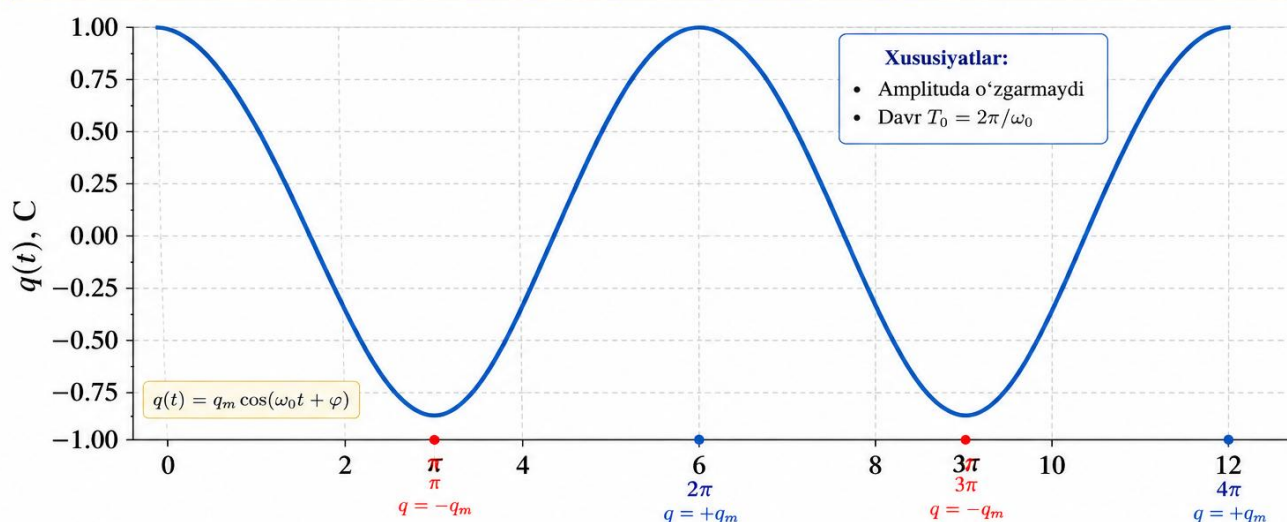
Ideal LC konturda $R=0$ deb olinadi. Energiya yo'qotilmagani sabab amplituda vaqt bo'yicha o'zgarmaydi. Kondensator to'liq zaryadlangan paytda tok nol, energiya elektr maydonda; kondensator razryadlanib $q=0$ bo'lgan paytda tok maksimal va energiya induktivlik magnit maydonida bo'ladi.

$$W_E = q^2/(2C)$$

$$W_B = LI^2/2$$

$$W = q^2/(2C) + LI^2/2 = \text{const}$$

So'nishsiz xususiy elektr tebranish



Tushuntirish:

$q(t)$ — kondensator zaryadi (C)

q_m — zaryad amplitudasi (C)

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — xususiy burchak chastota (rad/s)

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ — xususiy davr (s)

φ — boshlang'ich faza (rad)

Ideallashtirilgan (yo'qotishsiz) LC kontur uchun tenglamalar:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \Rightarrow q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

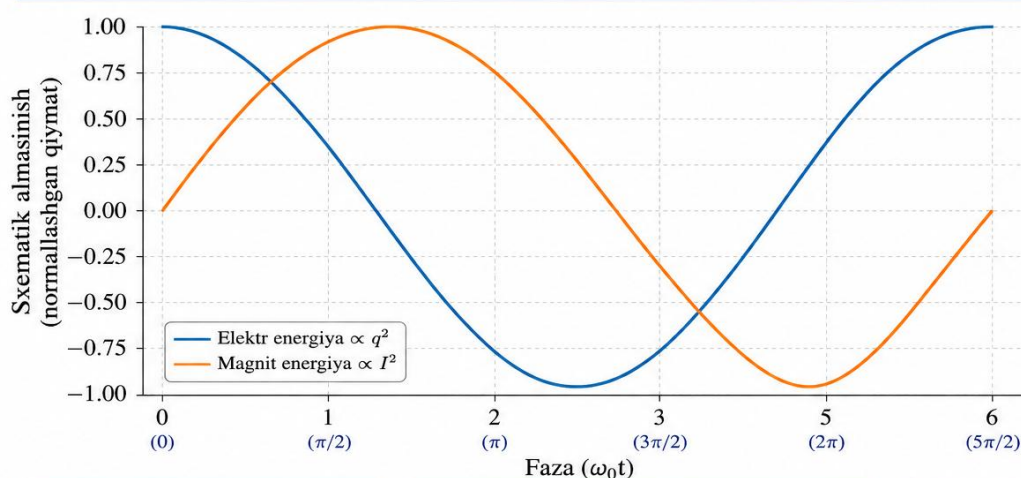
bu yerda:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \text{const} \quad (\text{to'liq energiya saqlanadi})$$

2-rasm. Ideal LC konturdagi so'nishsiz garmonik elektr tebranish

LC konturda elektr va magnit holatlarning davriy almashinuvi



Xususiyatlar:

- Elektr energiya $W_E \propto q^2$
- Magnit energiya $W_B \propto I^2$
- To'liq energiya doimiy:
 $W = W_E + W_B = \text{const}$
- Elektr va magnit energiyalar bir-biriga faza bo'yicha $\frac{\pi}{2}$ ga siljigan.

LC kontur uchun:

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Bu yerda:

q — kondensator zaryadi

I — konturdan oqayotgan tok

q_m — zaryad amplitudasi

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — burchak chastota (rad/s)

Energialar:

$$W_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$W_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

bu yerda $I_m = \omega_0 q_m$

To'liq energiya (doimiy):

$$W = W_E + W_B = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}$$

Davr va faza:

$$\text{Davr: } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\text{Faza: } \theta = \omega_0 t + \varphi \quad (\text{rad})$$

Elektr va magnit energiyalar o'zaro $\frac{\pi}{2}$ ga siljigan:

- W_E maksimum: $\theta = 0, 2\pi, \dots$
- W_B maksimum: $\theta = \pi/2, 5\pi/2, \dots$
- W_E minimum: $\theta = \pi, 3\pi, \dots$
- W_B minimum: $\theta = 3\pi/2, \dots$

Xulosa: LC konturda energiya kondensatordagi elektr maydon va induktordagi magnit maydon o'rtasida davriy almashinib turadi, ammo ularning yig'indisi — to'liq energiya o'zgarmay saqlanadi.

3-rasm. LC konturda elektr va magnit energiya shakllarining davriy almashinuvi

2-misol

$C=10 \mu\text{F}$ kondensator $U_0=100 \text{ V}$ gacha zaryadlangan. $q_0=CU_0=1.0 \text{ mC}$. Boshlang'ich energiya $W=CU_0^2/2=0.05 \text{ J}$. Ideal konturda bu qiymat vaqt davomida saqlanadi.

3. So'nuvchi elektr tebranishlar

Real RLC konturda rezistiv yo'qotishlar mavjud. Kirxgof tenglamasi:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + q/C = 0$$

L ga bo'lib va $\beta=R/(2L)$, $\omega_0^2=1/(LC)$ deb olsak:

$$d^2q/dt^2 + 2\beta dq/dt + \omega_0^2 q = 0$$

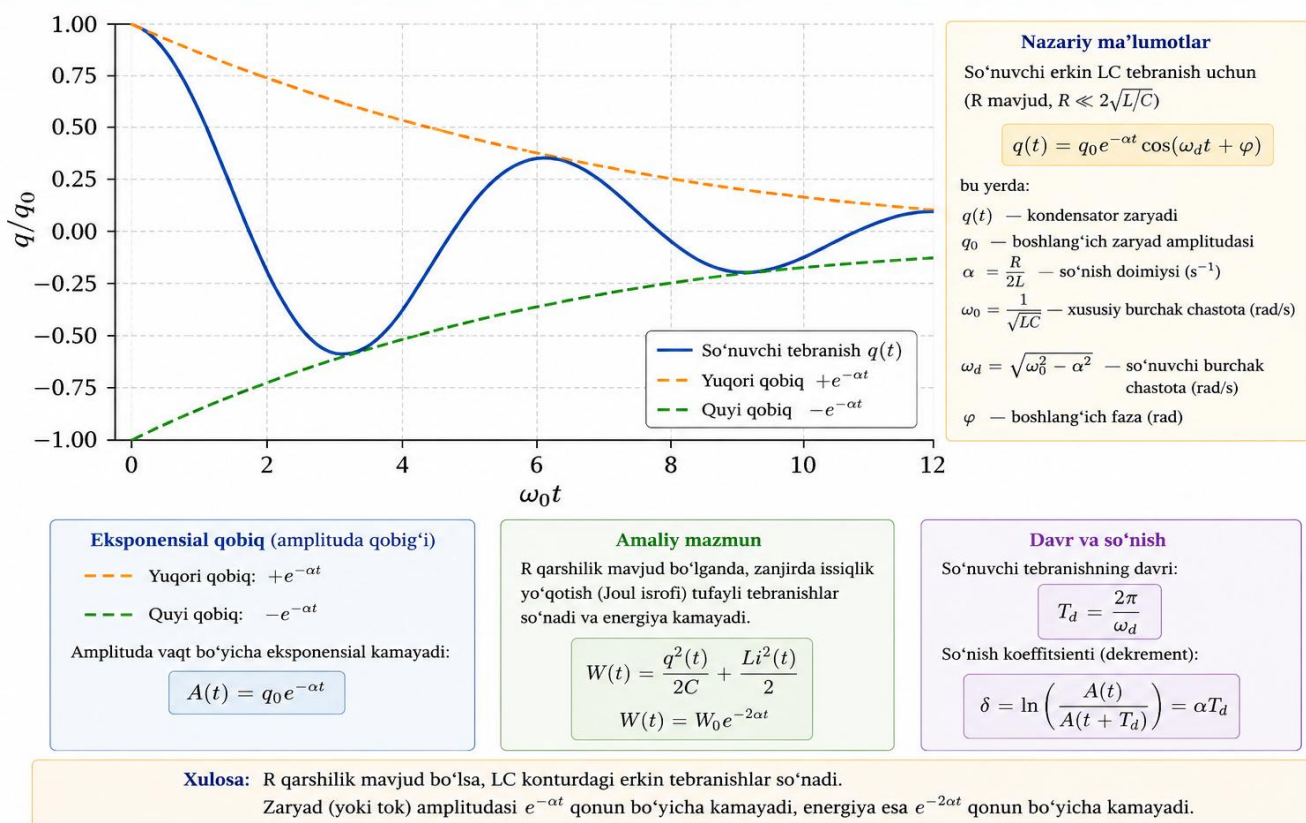
Agar $\beta < \omega_0$ bo'lsa, tebranish so'nuvchi, lekin davriy xarakterini saqlaydi:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}$$

Amplituda $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ qonun bilan kamayadi. R ortgani sari β ortadi va tebranish tezroq so'nadi.

So'nuvchi elektr tebranish va eksponensial qobiq



4-rasm. So'nuvchi tebranish: amplituda eksponensial qobiq bo'yicha kamayadi

3-misol

$L=0.5 \text{ H}$, $R=10 \Omega$ bo'lsa $\beta=R/(2L)=10 \text{ s}^{-1}$. Agar $C=200 \mu\text{F}$ bo'lsa $\omega_0=1/\sqrt{LC}=100 \text{ rad/s}$; $\omega \approx \sqrt{(10000-100)}=99.5 \text{ rad/s}$. Demak, so'nish chastotani biroz kamaytiradi.

4. So'nish rejimlari va kritik qarshilik

RLC kontur yechimi β va ω_0 nisbatiga bog'liq. $\beta < \omega_0$ — tebranuvchi so'nish; $\beta = \omega_0$ — kritik so'nish; $\beta > \omega_0$ — aperiodik so'nish. Kritik holatga mos qarshilik:

$$R_{kr} = 2\sqrt{L/C}$$

Kritik qarshilikdan kichik R da tizim muvozanat holatidan bir necha marta o'tadi. Kritik holatda muvozanatga tebranmasdan eng tez yaqinlashadi. $R > R_{kr}$ bo'lsa, qaytish sekin aperiodik xarakterga ega.

Rejim	Shart	Xarakter
So'nuvchi tebranish	$R < 2\sqrt{L/C}$	Ekspontensial kamayuvchi sinusoid
Kritik so'nish	$R = 2\sqrt{L/C}$	Tebranishsiz eng tez qaytish
Aperiodik	$R > 2\sqrt{L/C}$	Tebranishsiz sekin qaytish

4-misol

$L = 0.8$ H va $C = 20$ μ F uchun $R_{kr} = 2\sqrt{(0.8/20 \times 10^{-6})} = 400$ Ω . $R = 40$ Ω bo'lsa tebranuvchi so'nish, $R = 400$ Ω kritik, $R = 800$ Ω aperiodik rejim yuz beradi.

Logarifmik dekrement

Ketma-ket ikki maksimum amplitudasi A_n va $A_{(n+1)}$ uchun logarifmik dekrement:

$$\delta = \ln(A_n/A_{(n+1)}) = \beta T_d$$

Bu kattalik bir davrda amplitudaning qanchalik kamayishini tavsiflaydi.

5. Sifat koeffitsienti va energiya yo'qotilishi

Zaif so'nuvchi kontur uchun sifat koeffitsienti Q energiya bir sikldagi nisbiy yo'qotilishi bilan bog'liq. Ketma-ket RLC kontur uchun:

$$Q = \omega_0 L/R = (1/R)\sqrt{L/C}$$

Shuningdek, zaif so'nishda $Q \approx \pi/\delta$. Q katta bo'lsa, kontur kam so'nadi, rezonans cho'qqisi o'tkir va selektivlik yuqori bo'ladi.

Energiya amplitudaning kvadratiga proporsional bo'lgani uchun q amplitudasi $e^{-\beta t}$ bilan kamayganda energiya taxminan $e^{-2\beta t}$ qonun bo'yicha kamayadi.

5-misol

$L = 0.10$ H, $C = 1$ μ F, $R = 10$ Ω . $\omega_0 = 1/\sqrt{(10^{-7})} \approx 3162$ rad/s. $Q = \omega_0 L/R \approx 31.6$. Kontur nisbatan yuqori sifatli va rezonans egri chizig'i ancha tor bo'ladi.

Parametr	Formula	Fizik ma'no
ω_0	$1/\sqrt{LC}$	Ideal xususiy chastota
β	$R/(2L)$	Amplituda so'nish tezligi
ω	$\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}$	So'nuvchi tebranish chastotasi
δ	βT_d	Bir davrdagi logarifmik so'nish
Q	$\omega_0 L/R$	Selektivlik va kam yo'qotish mezon

6. Majburiy elektr tebranishlar

Konturga tashqi davriy EYuK $\varepsilon(t)=\varepsilon_0\cos\omega t$ ta'sir qilsa, RLC zanjir tenglamasi:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + q/C = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

O'tkinchi xususiy tebranish so'ngach, tizim tashqi manba chastotasida majburiy tebranadi. Ketma-ket RLC zanjirning to'liq qarshiligi:

$$Z = \sqrt{[R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2]}$$

Tok amplitudasi:

$$I_m = \varepsilon_0/Z$$

Faza siljishi:

$$\tan \varphi = (\omega L - 1/(\omega C))/R$$

Past chastotada sig'im qarshiligi ustun, yuqori chastotada induktiv qarshilik ustun. Rezonans yaqinida ular bir-birini kompensatsiya qiladi.

6-misol

$R=20 \, \Omega$, $L=0.1 \, \text{H}$, $C=100 \, \mu\text{F}$ va $\omega=100 \, \text{rad/s}$. $X_L=\omega L=10 \, \Omega$; $X_C=1/(\omega C)=100 \, \Omega$; $Z=\sqrt{(20^2+(-90)^2)}\approx 92.2 \, \Omega$. $\varepsilon_0=10 \, \text{V}$ bo'lsa $I_m\approx 0.108 \, \text{A}$.

7. Elektr rezonansi

Ketma-ket RLC zanjirda rezonans induktiv va sig'im reaktiv qarshiliklari tenglashganda yuz beradi:

$$\omega L = 1/(\omega C)$$

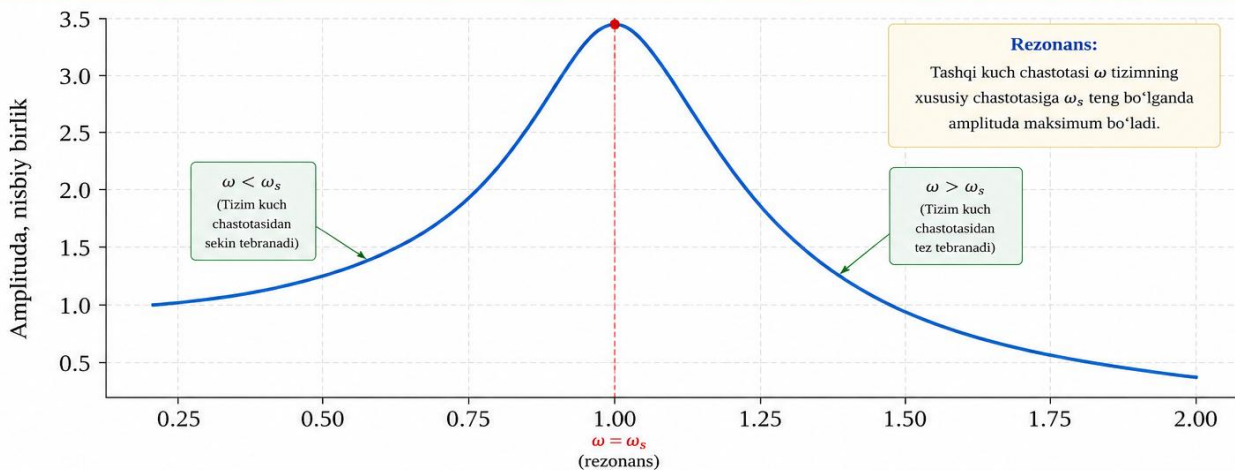
$$\omega_r = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$$

Ideal ketma-ket modelda rezonansda $Z=R$ va tok amplitudasi maksimal:

$$I_{\max} = \varepsilon_0/R$$

Real tizimlarda rezonansning aniq xususiyatlari so'nish va kuzatilayotgan kattalikka bog'liq. Tok rezonansi uchun yuqori Q sharoitida $\omega_r\approx\omega_0$ juda yaxshi yaqinlashuvdir.

Majburiy elektr tebranishlarda rezonans egri chizig'i



Majburiy so'nuvchi RLC kontur
Tashqi sinusoidal kuch bilan qo'zg'atilgan RLC konturda kondensator kuchlanishining amplitudasi:

$$U_m = \frac{U_0}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$

bu yerda:
 U_0 — tashqi kuch amplitudasi
 ω — tashqi kuch chastotasi (rad/s)
 $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — konturning xususiy chastotasi (rad/s)
 $\beta = \frac{R}{2L}$ — so'nish koeffitsienti (s^{-1})

Rezonans sharoiti
 $\omega = \omega_s$
 Bu holda amplituda maksimum qiymatga ega:

$$U_{m,max} = \frac{U_0}{2\beta\omega_s}$$

Sifat koeffitsienti:

$$Q = \frac{\omega_s}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

 So'nish kichik bo'lsa (Q katta bo'lsa), rezonans cho'qqisi balandroq va torroq bo'ladi.

Fizik mazmun

- $\omega \ll \omega_s$ da induktivlik ta'siri kichik, tizim tashqi kuchga deyarli ergashadi.
- $\omega = \omega_s$ da konturda energiya almashinuvi eng samarali bo'ladi va amplituda keskin ortadi.
- $\omega \gg \omega_s$ da inertsia (induktivlik) kuchayadi, tizim tashqi kuchni "sezmaydi" va amplituda kichrayadi.
- Rezonans egri chizig'i so'nish darajasiga bog'liq.

Xulosa: Majburiy elektr tebranishlarda rezonans hodisasi tizim energiyasining tashqi manba bilan eng samarali almashinuvini ta'minlaydi. Rezonansda amplituda maksimum, lekin ortiqcha so'nish bo'lsa, cho'qqi past va keng bo'ladi.

5-rasm. Majburiy elektr tebranishlarda rezonans amplitudasi

7-misol

$L=50$ mH, $C=20$ μ F. $\omega_0=1/\sqrt{(0.05 \times 20 \times 10^{-6})}=1000$ rad/s, $f_0 \approx 159.2$ Hz. Agar $R=25$ Ω va $\varepsilon_0=5$ V bo'lsa rezonansda $I_m=5/25=0.20$ A.

8-misol

Yuqoridagi kontur uchun $Q=\omega_0 L/R=1000 \times 0.05/25=2$. Rezonans mavjud, ammo Q uncha katta bo'lmagani uchun cho'qqi kengroq bo'ladi.

8. Xususiy, so'nuvchi va majburiy tebranishlarni taqqoslash

Belgi	So'nishsiz xususiy	So'nuvchi xususiy	Majburiy
Manba	Yo'q	Yo'q	Davriy tashqi EYuK
R	0	$R>0$	$R>0$
Amplituda	Doimiy	$e^{-\beta t}$ bilan kamayadi	Barqaror rejimda doimiy
Chastota	ω_0	$\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}$	Tashqi ω
Energiya	Saqlanadi	Issiqlikka kamayadi	Manbadan to'ldiriladi
Muhim hodisa	Energiya almashinuvi	So'nish	Rezonans

Darsni tashkil etish metodikasi

Darsni zaryadlangan kondensatorni induktiv g'altakka ulash haqidagi muammoli savoldan boshlash mumkin: zaryad nega birdan yo'qolmaydi va tok nega yo'nalishini almashtiradi? So'ng energiya almashinuvi asosida LC kontur tushuntiriladi, Kirxgof qonunidan differensial tenglama chiqariladi. Keyin R qo'shib so'nish, tashqi sinusoidal EYuK qo'shib majburiy tebranish va rezonansga o'tiladi.

Grafiklarni qiyoslashda talabalar uchta asosiy belgini aniqlashi kerak: amplitudaning vaqt bo'yicha xatti-harakati, tebranish chastotasini kim belgilashi va energiya qayerdan kelib qayerga ketishi. Bu yondashuv formulalarni mexanik yodlashdan ko'ra fizik jarayonni yaxlit anglashga yordam beradi.

Ko'p uchraydigan xatolar

ω va f ni aralashtirish; Tomson formulasida 2π ni unutish; $\beta=R/(2L)$ o'rniga R/L yozish; so'nuvchi chastotani ω_0 bilan aynan teng olish; rezonansda induktiv va sig'im kuchlanishlari nol bo'ladi deb o'ylash; majburiy tebranish chastotasini xususiy chastota belgilaydi deb hisoblash.

9. Mustaqil topshiriqlar va yakuniy xulosa

Asosiy formula	Mazmuni
$\omega_0=1/\sqrt{LC}$	Xususiy burchak chastota
$T=2\pi\sqrt{LC}$	Tomson formulasi
$q=q_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$	So'nishsiz zaryad tebranishi
$q=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$	So'nuvchi tebranish
$\beta=R/(2L)$	So'nish koeffitsienti
$\omega=\sqrt{(\omega_0^2-\beta^2)}$	So'nuvchi chastota
$Q=\omega_0 L/R$	Sifat koeffitsienti
$Z=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}$	Ketma-ket RLC impedansi
$\omega_r\approx 1/\sqrt{LC}$	Rezonans chastotasi

Mustaqil topshiriqlar

1. $L=0.4$ H va $C=2$ μ F kontur uchun T , f va ω_0 ni hisoblang.
2. $C=5$ μ F kondensator 200 V gacha zaryadlangan. Boshlang'ich energiyani toping.
3. $L=0.2$ H, $R=8$ Ω bo'lsa β ni aniqlang. $C=50$ μ F uchun so'nish rejimini tekshiring.
4. $L=0.1$ H, $C=10$ μ F kontur uchun kritik qarshilik R_{kr} ni hisoblang.
5. $R=10$ Ω , $L=0.05$ H, $C=50$ μ F va $\varepsilon_0=12$ V bo'lgan zanjirning rezonans chastotasi va rezonans tok amplitudasini toping.
6. Q ortganda rezonans egri chizig'ining shakli va kontur selektivligi qanday o'zgarishini izohlang.

Yakuniy xulosa

Elektr tebranishlar LC yoki RLC zanjirda elektr va magnit energiya o'zaro almashinuvi bilan bog'liq. Ideal LC konturda xususiy tebranishlar $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ chastotada so'nishsiz davom etadi va umumiy elektromagnit energiya saqlanadi. Real RLC konturda R qarshilik energiyani issiqlikka aylantiradi, natijada amplituda $e^{-\beta t}$ qonun bilan kamayadi va $\omega=\sqrt{(\omega_0^2-\beta^2)}$. Davriy tashqi EYuK mavjud bo'lsa, o'tkinchi jarayondan keyin majburiy tebranish tashqi chastotada qaror topadi. $\omega\approx\omega_0$ atrofida rezonans yuz beradi; uning

keskinligi R va Q sifat koeffitsientiga bog'liq. Ushbu qonuniyatlar radioelektronika, filtrlar, generatorlar, aloqa va o'lchash tizimlarining nazariy asosidir.

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

1. Halliday D., Resnick R., Walker J. Fundamentals of Physics. Wiley.
2. Young H. D., Freedman R. A. University Physics with Modern Physics. Pearson.
3. Griffiths D. J. Introduction to Electrodynamics. Cambridge University Press.
4. Serway R. A., Jewett J. W. Physics for Scientists and Engineers. Cengage.