

ELEKTROSTATIKANING UMUMIY MASALASI. PUASSON VA LAPLAS TENGLAMALARI. IRNSHOU TEOREMASI

Elektrostatik chegaraviy masalalarni ilmiy tahlil qilish va yechish asoslari

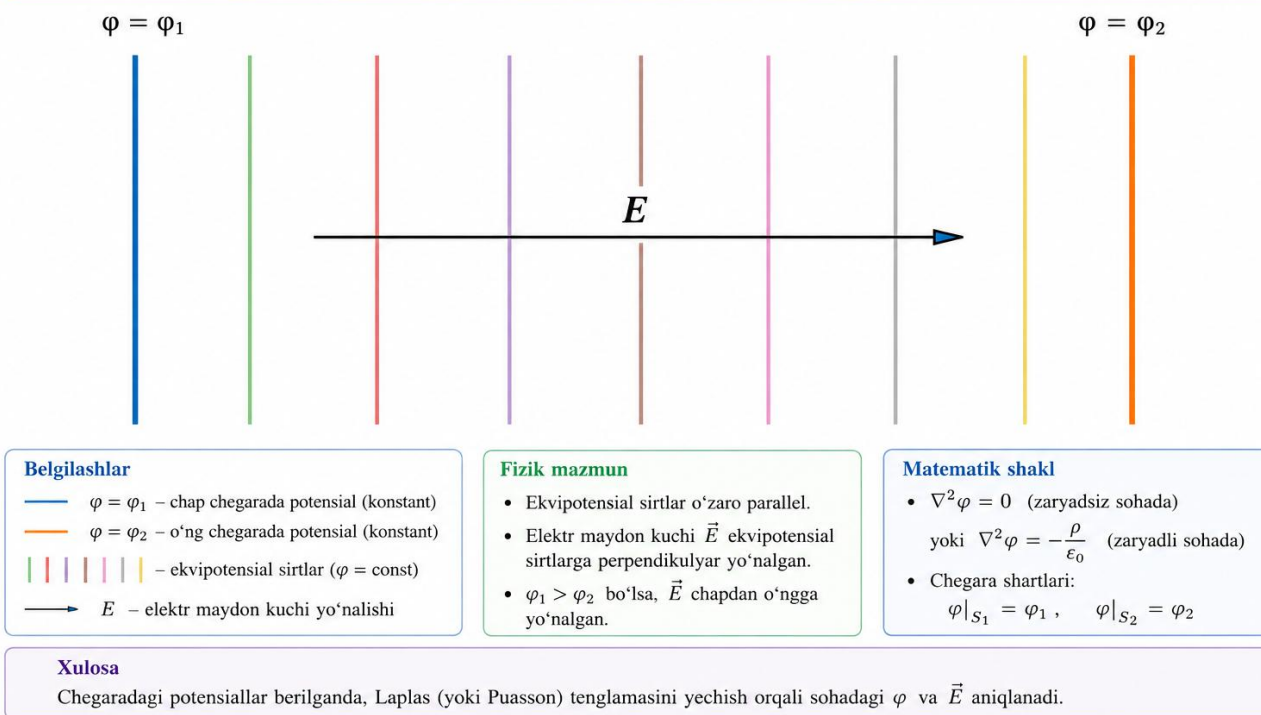
Elektrostatikaning umumiy masalasi fazoda elektr zaryadlarining taqsimoti hamda chegaralardagi fizik shartlar ma'lum bo'lganda elektr potentsiali φ va elektr maydon kuchlanganligi E ni aniqlashdan iborat. Masalani potentsial orqali ifodalash ko'pincha qulay, chunki E vektor kattalik bo'lsa, φ skalyar kattalikdir. Gauss qonuni va $E = -\nabla\varphi$ munosabatini birlashtirish natijasida zaryad mavjud sohada Puasson, zaryadsiz sohada esa Laplas tenglamasi hosil bo'ladi. Ushbu tenglamalar elektrostatika, kondensatorlar, elektron optika, yarimo'tkazgichlar, plazma fizikasi va ko'plab muhandislik masalalarining matematik asosidir.

Darsning maqsadi

Talabalarga elektrostatik chegaraviy masalaning mazmunini, potensial uchun differensial tenglamalarning kelib chiqishini, chegaraviy shartlar va yagonalik prinsipining rolini tushuntirish; Puasson va Laplas tenglamalarini sodda geometriyalarda qo'llash; Irnshou teoremasining fizik mohiyatini potensialning maksimum-minimum xossalari orqali izohlash.

Elektrostatikaning chegaraviy masalasi

Elektrostatikaning chegaraviy masalasi – berilgan sohada potensial φ Laplas yoki Puasson tenglamasini qanoatlantiradi va chegara sirtlarda (chegaralarda) potensial qiymatlari ma’lum.



1-rasm. Potensiallari berilgan chegaralar orasidagi elektrostatik masala

Umumiy masalada faqat zaryadlarni bilish yetarli bo‘lmasligi mumkin. Potensialning chegaradagi qiymati yoki sirt normaliga nisbatan hosilasi kabi chegaraviy shartlar ham yechimni aniqlaydi.

1. Elektrostatiikaning umumiy masalasi

Elektrostatikada asosiy noma'lum funksiyani $\varphi(r)$ potensial deb olish mumkin. Potensial topilgach, maydon $E = -\nabla\varphi$ orqali aniqlanadi. Shuning uchun umumiy masala berilgan zaryad zichligi $\rho(r)$, muhit parametrlari va chegaraviy shartlar asosida $\varphi(r)$ ni topishga keltiriladi.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Gauss qonunining differensial ko'rinishi vakuumda $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$. $E = -\nabla\varphi$ ni qo'ysak:

$$\nabla \cdot (-\nabla\varphi) = \rho/\epsilon_0$$

$$-\nabla^2\varphi = \rho/\epsilon_0$$

Bu yerda $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ Laplas operatori. Natijada potensial uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama olinadi.

Chegaraviy shartlarning turlari

Shart turi	Matematik ifoda	Fizik mazmun
Dirixle	$\varphi _S = f$	Chegaradagi potensial berilgan
Neyman	$\partial\varphi/\partial n _S = g$	Normal elektr maydon/hosila berilgan
Aralash	$a\varphi + b\partial\varphi/\partial n = c$	Potensial va hosila birgalikda bog'langan

Masalan, ideal o'tkazgich sirtida potensial doimiy. Yerga ulangan o'tkazgich uchun $\varphi = 0$ deb olinadi. Sirt zaryad zichligi ma'lum bo'lsa, normal maydon komponenti orqali Neyman tipidagi shart hosil bo'ladi.

1-misol

$x=0$ va $x=d$ tekisliklarda potenciallar mos ravishda φ_1 va φ_2 bo'lsa hamda ular orasida erkin hajmiy zaryad bo'lmasa, masala Laplas tenglamasi va $\varphi(0)=\varphi_1$, $\varphi(d)=\varphi_2$ chegaraviy shartlari bilan aniqlanadi. Keyingi bo'limlarda uning yechimi olinadi.

2. Puasson tenglamasi

Hajmiy zaryad zichligi ρ noldan farqli bo'lgan elektrostatik sohada potensial Puasson tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$$

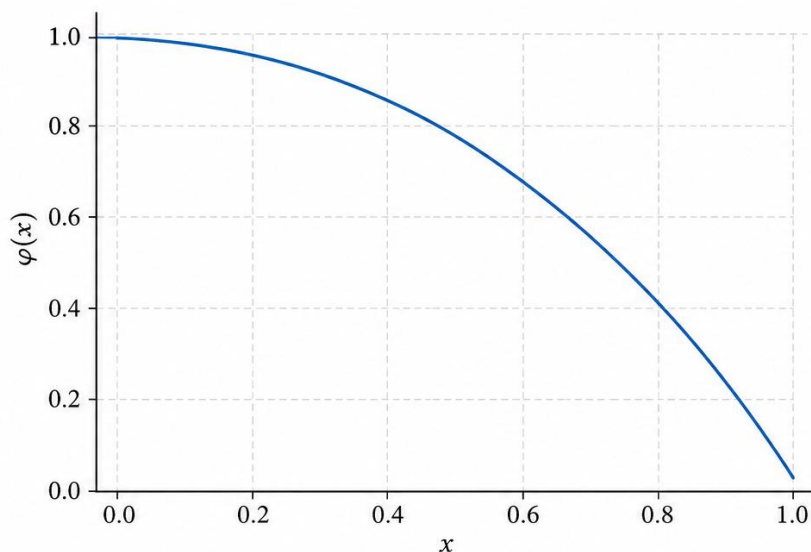
Dekart koordinatalarida Laplas operatori:

$$\nabla^2\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2$$

Demak, Puasson tenglamasi potensialning fazoviy egriligini zaryad zichligi bilan bog'laydi. Musbat ρ mavjud joyda $\nabla^2\varphi$ manfiy bo'ladi. Bir o'lchamli holatda bu φ grafigining ikkinchi hosilasi manfiy ekanini bildiradi.

Doimiy ρ uchun Poisson tenglamasiga xos potensial profili

$0 \leq x \leq 1$ oralig'ida doimiy hajmiy zaryad zichligi ρ bo'lgan soha uchun Poisson tenglamasining yechimi (bir o'lchovli hol):
 $\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(1) = \varphi_1$



Izoh

- Grafikda $\varphi_0 = 1$ va $\varphi_1 = 0$ hol uchun potensial $\varphi(x)$ taqsimoti ko'rsatilgan.
- $x = 0$ da potensial maksimal, $x = 1$ da minimal.
- ρ ortishi bilan egri chiziqliq pastga qarab ko'proq egiladi.

Matematik model

Puasson tenglamasi (1D):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Chegaraviy shartlar:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(1) = \varphi_1$$

Analitik yechim

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 + \left(\varphi_1 - \varphi_0 + \frac{\rho}{2\epsilon_0}\right)x + \varphi_0$$

Agar $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = 0$ bo'lsa:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 + \frac{\rho}{2\epsilon_0}x$$

Fizik izoh

- $\rho = \text{const} > 0$ bo'lsa, $\varphi(x)$ kvadratik funksiya ko'rinishida.
- Potensial chapdan o'ngga monoton kamayadi.
- Grafik chegaraviy shartlar $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0$ uchun keltirilgan.

2-rasm. Doimiy musbat zaryad zichligida Poisson tenglamasiga xos potensial profili

2-misol: bir o'lchamli Poisson masalasi

$0 \leq x \leq d$ sohada $\rho = \rho_0 = \text{const}$ va potensial faqat x ga bog'liq bo'lsin. Tenglama:

$$d^2\varphi/dx^2 = -\rho_0/\epsilon_0$$

Ikki marta integrallab:

$$\varphi(x) = -(\rho_0/2\epsilon_0)x^2 + C_1x + C_2$$

C_1 va C_2 chegaraviy shartlardan aniqlanadi. Masalan, $\varphi(0)=0$ va $\varphi(d)=0$ bo'lsa, $C_2=0$ va $C_1=\rho_0d/(2\epsilon_0)$. Shunda:

$$\varphi(x) = [\rho_0/(2\epsilon_0)]x(d-x)$$

Potensial $x=d/2$ da maksimumga ega. $E_x = -d\varphi/dx$ bo'lib, markazda $E=0$. Bu nol maydon nuqtasi zaryad mavjud bo'lgan sohada hosil bo'lgani uchun Irnshou teoremasiga zid emas.

3. Laplas tenglamasi

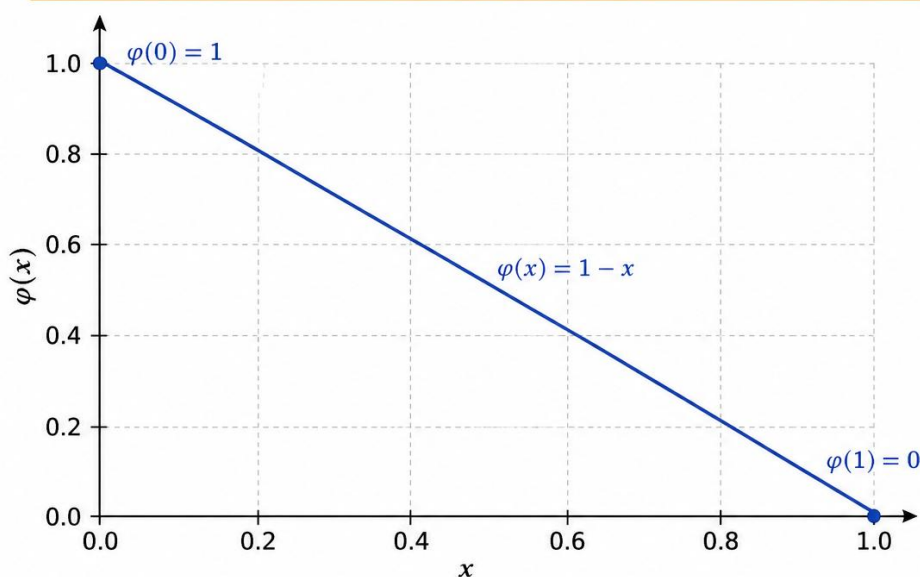
Agar ko'rilayotgan sohada hajmiy erkin zaryad bo'lmasa, $\rho=0$ va Poisson tenglamasi Laplas tenglamasiga aylanadi:

$$\nabla^2\varphi = 0$$

Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi funksiyalar garmonik funksiyalar deyiladi. Garmonik potensial zaryadsiz sohada lokal maksimum yoki lokal minimumga ega bo'la olmaydi; uning qiymati chegaraviy qiymatlar bilan boshqariladi. Bu xossa Irnshou teoremasining matematik asoslaridan biridir.

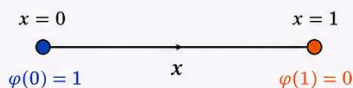
$\rho = 0$ sohada Laplas tenglamasi: chiziqli potensial

Zaryadsiz sohada ($\rho = 0$) Laplas tenglamasi $\nabla^2 \varphi = 0$ ko'rinishni oladi.
 $0 \leq x \leq 1$ oraliqda quyidagi chegaraviy shartlar uchun yechim chiziqli bo'ladi.



Izoh

- $x = 0$ da potensial maksimum ($\varphi = 1$).
- $x = 1$ da potensial minimum ($\varphi = 0$).
- Grafik $0 \leq x \leq 1$ oraliqda chiziqli profilni ko'rsatadi.



Matematik model

Laplas tenglamasi ($\rho = 0$):

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Chegaraviy shartlar:

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0$$

Yechim

Laplas tenglamasining yechimi:

$$\varphi(x) = 1 - x$$

Umumiy ko'rinish:

$$\varphi(x) = Ax + B$$

Bu yerda $A = -1$, $B = 1$.

Fizik ma'no

- $\rho = 0$ sohada manbalar yo'q.
- Potensial $\varphi(x)$ chiziqli ravishda kamayadi.
- Elektr maydon bir xil:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = 1 \quad (\text{const})$$

3-rasm. Bir o'lchamli zaryadsiz sohada Laplas tenglamasining chiziqli yechimi

3-misol: parallel plastinalar

$0 < x < d$ oraliqda $\rho = 0$ va $\varphi(0) = V_0$, $\varphi(d) = 0$. Bir o'lchamda:

$$d^2 \varphi / dx^2 = 0$$

$$\varphi(x) = Ax + B$$

Chegaraviy shartlardan $B = V_0$, $A = -V_0/d$. Demak:

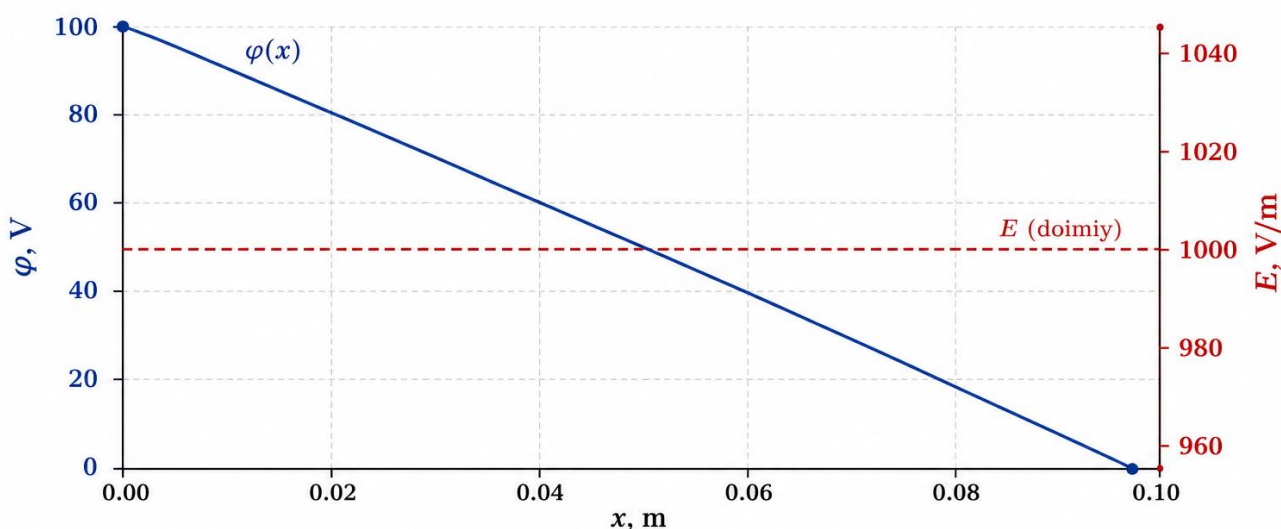
$$\varphi(x) = V_0(1 - x/d)$$

$$E_x = -d\varphi/dx = V_0/d$$

Natijada plastinalar orasidagi maydon bir jinsli. Masalan, $V_0 = 120$ V va $d = 6$ mm bo'lsa, $E = 2.0 \times 10^4$ V/m.

Parallel plastinalar orasida φ va E

Ikki katta parallel plastina orasidagi bir jinsli elektr maydon va chiziqli o'zgaruvchi potensial.



Potensial

- Chiziqli taqsimot:

$$\varphi(x) = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} x$$

- Grafikda: $\varphi_1 = 100$ V, $\varphi_2 = 0$ V, $d = 0.10$ m
- $\varphi(x)$ chap plastinada maksimum (100 V), o'ng plastinada minimum (0 V).

Elektr maydon

- Bir jinsli (doimiy):

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \text{const}$$

- Grafikda: $E = 1000$ V/m (o'ngga yo'nalgan).

Fizik ma'no

- Parallel plastinalar orasida elektr maydon chiziqlari bir-biriga parallel va bir jinsli.
- Potensial masofa bo'ylab chiziqli ravishda kamayadi.

$$E = 1000 \text{ V/m} \quad (\text{doimiy})$$

4-rasm. Parallel plastinalar orasida potensialning chiziqli, E ning doimiy bo'lishi

4. Puasson va Laplas tenglamalarining taqqoslanishi

Belgi	Puasson tenglamasi	Laplas tenglamasi
Tenglama	$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
Qo'llanish sohasi	$\rho \neq 0$ bo'lgan soha	$\rho = 0$ bo'lgan soha
Fizik mazmun	Potensial egriligi zaryad manbasi bilan bog'liq	Potensial faqat chegaralar/manbalar ta'sirida
1D yechim	Ko'pincha kvadratik	Chiziqli
Ekstremum	Zaryadli sohada mumkin	Ichki lokal max/min mumkin emas

Bir fizik tizimning turli sohalarida ikkala tenglama birgalikda uchrashi mumkin. Masalan, zaryadlangan hajm ichida Puasson, undan tashqaridagi zaryadsiz fazoda Laplas tenglamasi bajariladi. Chegarada potensial odatda uzluksiz bo'ladi; elektr maydonning normal komponenti esa sirt zaryadi mavjudligiga qarab sakrashi mumkin.

4-misol: zaryadli va zaryadsiz sohalarni ajratish

Radiusi R bo'lgan bir jinsli hajmiy zaryadlangan sharni qaraylik. $r < R$ ichki sohada $\rho = \rho_0$ va $\nabla^2 \varphi = -\rho_0/\epsilon_0$. $r > R$ tashqi sohada $\rho = 0$ va $\nabla^2 \varphi = 0$. Sferik simmetriyada:

$$\nabla^2 \varphi = (1/r^2) d/dr (r^2 d\varphi/dr)$$

Ichki va tashqi yechimlar $r=R$ da potensialning uzluksizligi va maydonning tegishli chegaraviy shartlari orqali bir-biriga ulanadi. Bu yondashuv elektrostatiikaning umumiy

masalasiga xos: fazoni fizik jihatdan bir jinsli sohalarga ajratish, har birida mos tenglamani yechish va chegaralarda yechimlarni moslashtirish.

Muhim metodik qoida

Tenglamani tanlashdan oldin ‘bu nuqtada zaryad bormi?’ degan savol beriladi. Agar ρ ma’lum va noldan farqli bo’lsa — Puasson; agar $\rho=0$ bo’lsa — Laplas tenglamasi qo’llanadi.

5. Yagonalik teoremasi va chegaraviy masalaning fizik ma’nosi

Elektrostatik chegaraviy masalalarda yechimning mavjud bo’lishi bilan birga uning yagona ekanligi ham muhim. Yagonalik teoremasiga ko’ra, ma’lum sohada ρ berilgan va chegarada potensial qiymati berilgan bo’lsa, Puasson tenglamasining yechimi yagona. Zaryadsiz sohada bu Laplas tenglamasiga tegishli.

Bu teoremaning amaliy ahamiyati katta: agar biror usul bilan chegaraviy shartlarni va differensial tenglamani qanoatlantiruvchi potensial topilsa, boshqa yashirin yechim izlash shart emas. Tasvirlar usuli aynan shu prinsipga tayanadi.

Dirixle masalasining qisqa isboti g’oyasi

Faraz qilaylik, bir xil chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi φ_1 va φ_2 ikkita yechim mavjud. Ularning farqi $\psi=\varphi_1-\varphi_2$ uchun $\nabla^2\psi=0$ va chegarada $\psi=0$. Green identikligi yordamida $\int |\nabla\psi|^2 dV=0$ natija olinadi. Bundan $\nabla\psi=0$, demak ψ doimiy; chegarada $\psi=0$ bo’lgani uchun $\psi=0$ va $\varphi_1=\varphi_2$.

Chegarada potensial va maydon

Fizik holat	Chegaraviy xossa
Ideal o’tkazgich elektrostatik muvozanatda	Sirt bo‘ylab $\varphi = \text{const}$
O’tkazgich ichida	$E = 0, \varphi = \text{const}$
Ikki dielektrik chegarasi	Tangensial E uzluksiz
Sirt zaryadi σ mavjud	Normal E komponentida sakrash mavjud

Chegaraviy shartlar matematik qo‘shimcha emas, balki fizik tizimning real xususiyatlarini ifodalaydi. Shu sababli masalani to‘g‘ri qo‘yish yechimni topishning yarmidir.

6. Laplas tenglamasining maksimum-minimum prinsipi

Garmonik funksiya, ya’ni $\nabla^2\varphi=0$ ni qanoatlantiruvchi potensial zaryadsiz sohaning ichida qat’iy lokal maksimum yoki minimumga ega bo’la olmaydi. Ekstremal qiymatlar chegarada yuz beradi. Buni intuitiv ravishda o‘rtacha qiymat xossasi orqali tushuntirish mumkin: garmonik funksiyaning nuqtadagi qiymati uning atrofidagi sfera bo‘yicha o‘rtacha qiymatga teng.

Agar ichki nuqta barcha yaqin nuqtalardan katta qat’iy maksimum bo’lsa, uning qiymati atrofdagi qiymatlarning o‘rtachasiga teng bo’la olmaydi. Xuddi shunday qat’iy minimum uchun ham.

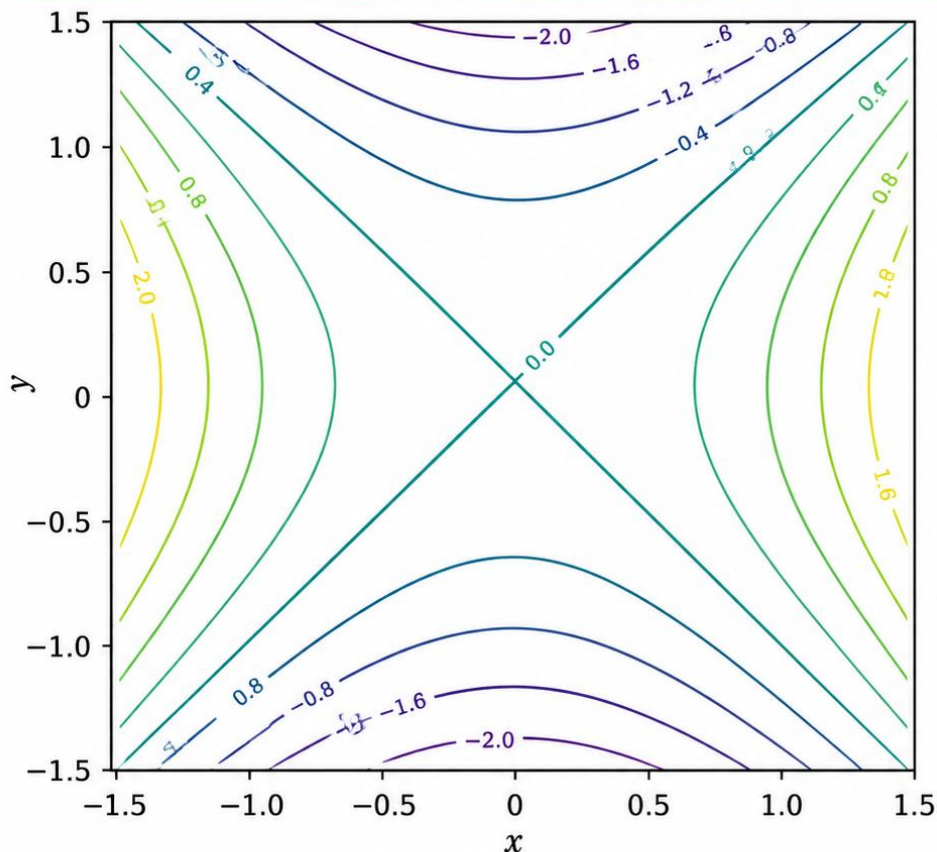
Egar nuqtasi

Laplas tenglamasi φ ning barcha yo'nalishlarda bir xil egrilikka ega minimum bo'lishiga yo'l qo'ymaydi. Masalan, ikki o'lchamda $\varphi = x^2 - y^2$ funktsiya uchun:

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 2 - 2 = 0$$

Laplas tenglamasiga mos egar-simon potensial: $\varphi = x^2 - y^2$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \quad (\text{Laplas tenglamasi bajariladi})$$



Matematik model

Laplas tenglamasi:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Yechim:

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2$$

Soha:

$$\begin{aligned} -1.5 \leq x \leq 1.5, \\ -1.5 \leq y \leq 1.5 \end{aligned}$$

Kontur ma'nosi

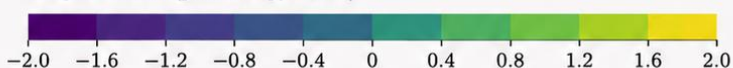
Bir xil rangdagi chiziqlar — bir xil potensial $\varphi = \text{const}$

- $\varphi > 0$: o'ng va chap sohalar
- $\varphi < 0$: yuqori va pastki sohalar
- $\varphi = 0$: diagonallar ($y = \pm x$)

Fizik ma'no

- Potensial markazda $\varphi(0, 0) = 0$.
- x o'qi bo'ylab ($y = 0$):
 $\varphi = x^2$ (musbat parabola).
- y o'qi bo'ylab ($x = 0$):
 $\varphi = -y^2$ (manfiy parabola).
- Bu yechim Laplas tenglamasining egar-simon (saddle) xususiyatini ko'rsatadi.

Ranglar shkalasi (potensial qiymatlari)



Qoramtir binafsha → φ eng kichik (-2.0)
Yashil/yorug'sariq → φ eng katta ($+2.0$)
Ko'k-yashil → $\varphi = 0$ atrofidagi qiymatlar

5-rasm. $\varphi = x^2 - y^2$ garmonik potensialning egar-simon ekvipotensial chiziqlari

Koordinata boshida gradient nol, ya'ni $E=0$, ammo bu barqaror minimum emas: x yo'nalishda φ ortadi, y yo'nalishda kamayadi. Shuning uchun muvozanat egar-simon va kamida bir yo'nalishda beqaror.

5-misol

$\varphi(x, y) = A(x^2 - y^2)$ bo'lsa, $E_x = -2Ax$, $E_y = +2Ay$. $(0, 0)$ da $E=0$. Musbat sinov zaryadi x bo'yicha markazga qaytaruvchi kuch sezishi mumkin, biroq y bo'yicha undan uzoqlashtiruvchi kuch paydo bo'ladi. Natijada uch o'lchamli statik elektrostatik qamalish hosil bo'lmaydi.

7. Irnshou teoremasi

Irnshou (Earnshaw) teoremasi klassik elektrostatikada erkin fazoda faqat statik Kulon kuchlari yordamida zaryadlangan zarrachani barqaror muvozanatda ushlab turish mumkin emasligini bildiradi. Barqaror muvozanat uchun potensial energiya barcha kichik siljishlar bo'yicha lokal minimumga ega bo'lishi kerak. Ammo zaryadsiz sohada φ Laplas tenglamasini qanoatlantiradi va ichki qat'iy minimum yoki maksimumga ega bo'la olmaydi.

$$\nabla^2\varphi = 0 \rightarrow \text{ichki qat'iy max/min yo'q}$$

Sinov zaryadining potensial energiyasi $U=q\varphi$. $q>0$ bo'lsa barqarorlik φ ning minimumini, $q<0$ bo'lsa φ ning maksimumini talab qiladi. Laplas tenglamasining maksimum-minimum prinsipi har ikkala imkoniyatni zaryadsiz sohada rad etadi.

Teoremaning fizik talqini

Bir yo'nalishda qaytaruvchi elektrostatik kuch yaratishga urinish boshqa yo'nalishdagi maydonni shunday o'zgartiradiki, kamida bitta beqaror yo'nalish paydo bo'ladi. Shu sababli oddiy statik elektrodlar yordamida erkin zaryadni uch o'lchamda mutlaq barqaror qamab qo'yish mumkin emas.

Irnshou teoremasining chegaralari

Holat	Irnshou teoremasi bilan munosabat
Faqat statik elektrostatik kuchlar	Barqaror qamalish mumkin emas
Vaqt bo'yicha o'zgaruvchi elektr maydon	Teoremaning oddiy sharti buziladi
Magnit/dinamik kuchlar	Qo'shimcha mexanizmlar barqarorlashtirishi mumkin
Mexanik tayanch yoki cheklov	Erkin fazodagi shartga kirmaydi

Masalan, ion tuzoqlarida vaqt bo'yicha o'zgaruvchi elektr maydonlardan foydalanilishi Irnshou cheklovini chetlab o'tishning muhim fizik usullaridan biridir. Bu teorema statik elektrostatik maydonning imkoniyat chegarasini ko'rsatadi.

8. Masala yechish algoritmi va dars metodikasi

Bosqich	Bajariladigan amal
1	Masala sohasini va geometriyasini aniqlash.
2	$\rho(r)$ mavjud yoki yo'qligini tekshirish.
3	$\rho \neq 0$ bo'lsa Puasson, $\rho = 0$ bo'lsa Laplas tenglamasini yozish.
4	Simmetriyaga mos koordinata sistemasini tanlash.
5	Chegaraviy shartlarni aniq yozish.
6	Differensial tenglamani integrallash yoki mos yechim shaklini tanlash.
7	Integrallash doimiylarini chegaraviy shartlardan topish.

8	$E = -\nabla\varphi$ orqali maydonni aniqlash va fizik tekshiruv o'tkazish.
---	---

6-misol: umumiy algoritm

$0 < x < d$ zaryadsiz oraliqda $\varphi(0)=200$ V, $\varphi(d)=50$ V, $d=0.03$ m. $\rho=0$ bo'lgani uchun $d^2\varphi/dx^2=0$. $\varphi=Ax+B$. $B=200$ V, $A=(50-200)/0.03=-5000$ V/m. Shunday qilib $\varphi(x)=200-5000x$ va $E_x=-d\varphi/dx=5000$ V/m.

Muammoli savollar

Nima uchun zaryadsiz sohada potensialning ichki minimumi bo'la olmaydi? $\varphi=\text{const}$ bo'lgan sohada E qanday bo'ladi? Puasson tenglamasidagi manfiy ishora qanday fizik ma'noga ega? Nima sababdan chegaraviy shartlarsiz ikkinchi tartibli tenglamaning yechimi to'liq aniqlanmaydi? Irnshou teoremasi ion tuzoqlariga nima sababdan to'g'ridan-to'g'ri taqiq qo'ymaydi?

Darsni tashkil etish tavsiyasi

Darsni $E = -\nabla\varphi$ va Gauss qonunidan Puasson tenglamasini chiqarish bilan boshlash, so'ng $\rho=0$ maxsus holat sifatida Laplas tenglamasini kiritish maqsadga muvofiq. Parallel plastinalar misolida chegaraviy shartlar, bir jinsli hajmiy zaryad misolida Puasson tenglamasi ko'rsatiladi. Yakunda maksimum-minimum prinsipi egar-simon grafik bilan tushuntirilib, undan Irnshou teoremasiga mantiqiy o'tiladi.

9. Asosiy formulalar, mustahkamlash va xulosa

Formula	Mazmuni
$E = -\nabla\varphi$	Potensialdan elektr maydon
$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$	Gauss qonunining differensial ko'rinishi
$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$	Puasson tenglamasi
$\nabla^2\varphi = 0$	Laplas tenglamasi
$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$	Dekart koordinatalaridagi Laplas operatori
$U = q\varphi$	Sinov zaryadining potensial energiyasi

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

- $0 < x < 0.02$ m zaryadsiz sohada $\varphi(0)=100$ V va $\varphi(0.02)=0$ V. $\varphi(x)$ va E ni toping.
- Bir o'lchamli sohada $\rho=4 \times 10^{-7}$ C/m³ doimiy. $d^2\varphi/dx^2$ ni hisoblang.
- $\varphi=x^2-y^2$ potensial Laplas tenglamasini qanoatlantirishini tekshiring va E ni toping.
- $\varphi=Ax^2+By^2+Cz^2$ potensial zaryadsiz sohada bo'lsa, $A+B+C$ orasidagi munosabatni aniqlang.
- Nima uchun zaryadsiz sohada φ ning qat'iy lokal minimumi musbat zaryad uchun barqaror elektrostatik tuzoq bo'la olmaydi? Irnshou teoremasi asosida izohlang.

Xulosa

Elektrostatikaning umumiy masalasi zaryad taqsimoti va chegaraviy shartlardan elektr potentsiali hamda elektr maydonni aniqlashga qaratilgan. Gauss qonuni bilan

$E = -\nabla\varphi$ munosabatining birlashishi Puasson tenglamasi $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ ni beradi; zaryadsiz sohada u Laplas tenglamasi $\nabla^2\varphi = 0$ ga aylanadi. Chegaraviy shartlar yechimning fizik mazmunini belgilaydi, yagonalik teoremasi esa to'g'ri topilgan yechimning yagona ekanligini kafolatlaydi. Laplas tenglamasining maksimum-minimum prinsipi zaryadsiz sohada potensialning ichki qat'iy ekstremumga ega bo'lishini taqiqlaydi. Shu matematik xossa Irnshou teoremasining asosini tashkil etib, faqat statik elektrostatik kuchlar yordamida erkin zaryadni uch o'lchamli barqaror muvozanatda ushlab turish mumkin emasligini ko'rsatadi.

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

1. Griffiths D. J. Introduction to Electrodynamics. Cambridge University Press.
2. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. Wiley.
3. Young H. D., Freedman R. A. University Physics with Modern Physics. Pearson.
4. Halliday D., Resnick R., Walker J. Fundamentals of Physics. Wiley.